RR-0630/500

RR-0630

First Year B. Sc. / B. A. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - I

(Algebra, Trigonometry & Vector Analysis)

(Old Course)

Time : 3 Hours] [Total Marks :

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :
☛ F. Y. B. Sc. / B. A.

Name of the Subject :
☛ Mathematics - 1 (Old)

☛ Subject Code No. : 0 6 3 0 ☛ Section No. (1, 2,.....) : Nil

Seat No. :

Student's Signature

(૨) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

(૩) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ (અ) માંગ્યા મુજબ જવાબ આપો : ૫

(૧) હર્મેટીઅન શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.

(૨) $\sin \alpha$ નું વિસ્તરણ લખો. (જ્યાં α રેડિયનમાં છે)

(૩) 'ઈરરોટેશનલ' (Irrotational Vector) સદિશની વ્યાખ્યા આપો.

(૪) ડાયવર્જન્સની વ્યાખ્યા લખો.

(૫) $\cos h^{-1} x$ની કિંમત જણાવો.

(બ) નીચેનાના ગણતરી કરીને જવાબ આપો : ૧૦

(૧) $\sin 9\theta$ના વિસ્તરણનું છેલ્લું પદ શોધો.

(૨) સાદુરૂપ આપો : $\dfrac{[\cos\theta - i\sin\theta]^5}{[\cos\theta + i\sin\theta]^7}$.

(૩) જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ તો AB શ્રેણિક શોધો.

(૪) બતાવો કે આપેલા સદિશો સમતલિય સદિશો છે.

$$\vec{a} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

(૫) જો $\vec{r} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ તો $\frac{d\vec{r}}{dt}$ અને $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ શોધો.

૨ (અ) દ' મોવ્રેનું પ્રમેય લખો અને તેને ધન અને ઋણ સંખ્યા માટે સાબિત કરો. ૬

(બ) સાબિત કરો કે : ૬

$$\{(\cos\theta + \cos\phi) + i(\sin\theta + \sin\phi)\}^n + \{(\cos\theta + \cos\phi) - i(\sin\theta + \sin\phi)\}^n = 2^{n+1}\cos^n\frac{\theta-\phi}{2}\cos n\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

(ક) જો $x = \cos\theta + i\sin\theta$ હોય તો $x^8 + \frac{1}{x^8}$ની કિંમત શોધો. ૬

અથવા

૨ (અ) $\sin h^{-1}x$ની કિંમત શોધો. ૬

(બ) સાબિત કરો કે : ૬

(૧) $\tan h(A+B) = \tan(A+B)$

(૨) $\sin h(-\theta) = -\sin h\,\theta$

(ક) $\cos 5\theta$નું $\cos\theta$ની પદાવલીમાં વિસ્તરણ કરો. ૬

૩ (અ) યુલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૬

(બ) $\cos(\theta + \phi i)$ નું તેમના વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક અંશોમાં વિયોજન કરો. ૬

(ક) જો $x + iy = \sin(u + iv)$ હોય તો સાબિત કરો : ૬

(૧) $\frac{x^2}{\cos h^2 \upsilon} + \frac{y^2}{\sin h^2 \upsilon} = 1$

(૨) $\frac{x^2}{\sin^2 u} + \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1.$

અથવા

૩ (અ) સાબિત કરો $\log_e \{1+\cos 2\theta - i \sin 2\theta\} = \log_e (2\cos\theta) - i\,\theta.$ ૬

(બ) સાબિત કરો $\sin(\alpha + n\beta) - e^{i\alpha} \sin n\beta = e^{-in\beta} \sin \alpha.$ ૬

(ક) $\tan^{-1}(x+i\,y)$નું તેના વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક અંશોમાં વિયોજન કરો. ૬

૪ (અ) વિસંમિત તથા હર્મેટીઅન શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. તેમનાં ગુણધર્મો લખો. ૬

(બ) સાબિત કરો કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે ૬

(૧) $A + A^{\theta}$ એ હર્મેટીઅન છે.

(૨) $A - A^{\theta}$ એ પ્રતિ હર્મેટીઅન છે.

(ક) સાબિત કરો : ૬

શ્રેણિક A હર્મેટીઅન હોય તો અને તોજ $A^{\theta} = A.$

અથવા

૪ (અ) શ્રેણિક A એ કોઈક શ્રેણિક Bને 'હાર-સમકોટિ' છે. એમ ક્યારે કહેવાય દર્શાવો કે : ૬

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+2z&=3 \\ 3y+z&=0 \\ x-2y&=1 \end{aligned}\right\} \quad \text{તથા} \quad \left\{\begin{aligned} x&=3 \\ x-2y&=1 \\ 3y+z&=0 \end{aligned}\right.$$

એ સમકક્ષ સમીકરણ સંહતિઓ છે.

(બ) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \end{bmatrix}$ ને હાર-સોપાન સ્વરૂપમાં દર્શાવો. ૬

(ક) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 7 & 11 & 15 \end{bmatrix}$ નો હાર-કોટયાંક પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીને શોધો. ૬

૫ (અ) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીને શોધો. ૬

(બ) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\0 & 2 & 6\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ ના આત્મ-મૂલ્યો શોધો. તથા તેમાંના સૌથી મોટા આત્મ-મૂલ્યને સંગત આત્મ-સદિશો મેળવો. ૬

(ક) અનુરૂપ શ્રેણિકોની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે બે અનુરૂપ શ્રેણિકોના આત્મ-મૂલ્યો સમાન હોય છે. ૬

અથવા

૫ (અ) સાબિત કરો કે હર્મેટીઅન શ્રેણિકના આત્મ-મૂલ્યો વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે. ૬

(બ) શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}7 & 2 & -2\\-6 & -1 & 2\\6 & 2 & -1\end{bmatrix}$ ના આત્મ-મૂલ્યો શોધો. તેમજ A માટે કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેયનું સમર્થન કરો. ૬

(ક) સાબિત કરો કે પ્રતિ-હર્મેટીઅન શ્રેણિકના આત્મ-મૂલ્યો શૂન્ય કે કાલ્પનિક સંખ્યા હોય છે. ૬

૬ (અ) જો $\vec{r}=(1-\cos t)\,\hat{i}+(t-\sin t)\,\hat{j}$ હોય તો $\frac{d\vec{r}}{dt}$ અને $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ શોધો.

(બ) જો $\frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{r}\times\vec{a}$ અને $\frac{d\vec{b}}{dt}=\vec{r}\times\vec{b}$ હોય તો બતાવો કે

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{r}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$$

(ક) જો અને જો સદિશ aને અચળમાન હોય તો અને તો જ $\vec{a}\cdot d\vec{a}/dt=0\cdot$

અથવા

૬ (અ) જો $\vec{f}=x^2y\,\hat{i}-2x\,z\,\hat{j}+2\,yz\,\hat{k}$ તો $Curl\ Curl\,\vec{f}$ શોધો. ૬

(બ) સાબિત કરો : $div\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)=\vec{v},\,Curl\,\vec{U}-\vec{U}.\,Curl\,\vec{V}.$ ૬

(ક) સદિશબિંદુ વિધેયના ‘સોલેનોઈડલ’ (Solenoidal) હોવા માટેની શરત જણાવો.અને સાબિત કરો કે $\vec{V}=(x+y)\hat{i}+(y-z)\,\hat{j}+(x-2\,z)\,\hat{k}$ ‘સોલેનોઈડલ’ (Solenoidal) છે. ૬

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the instruction no. **1** of page no. **1**.
(2) Figures to the **right** indicate marks of the question.
(3) Follow usual notations.
(4) Use of "Scientific Non-programmable Calculator" is allowed.

1 (a) Answer as directed : **5**

(1) Give definition of Hermitian matrix.

(2) State the expansion of $\sin \alpha$; where α is in radian.

(3) Define Irrotational Vector.

(4) 'Divergance' Give definition.

(5) State value of $\cos h^{-1} x$.

(b) Answer the following by computing : **10**

(1) Find the last term in the expansion of $\sin 9\theta$.

(2) Simplify : $\dfrac{[\cos \theta - i \sin \theta]^5}{[\cos \theta + i \sin \theta]^7}$.

(3) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ then find AB matrix.

(4) Show that :

$$\vec{a} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

are coplannar vectors.

(5) If $\vec{r} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ then find $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ and $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

2 (a) State De'Moivre's theorem and prove it for positive and Negative integers. **6**

(b) Prove that : **6**

$$\{(\cos\theta+\cos\phi)+i(\sin\theta+\sin\phi)\}^n+$$
$$\{(\cos\theta+\cos\phi)-i(\sin\theta+\sin\phi)\}^n=$$
$$2^{n+1}\cos^n\frac{\theta-\phi}{2}\cos n\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

(c) If $x=\cos\theta+i\sin\theta$ then find the value of $x^8+\frac{1}{x^8}$. **6**

OR

2 (a) Find the value of $\sin h^{-1}x$. **6**

(b) Prove that : **6**

(1) $\tan h(A+B)=\tan(A+B)$

(2) $\sin h(-\theta)=-\sin h\,\theta$

(c) Expand $\cos 5\theta$ interms of $\cos\theta$. **6**

3 (a) State and prove Euler's theorem. **6**

(b) Separate $\cos(\theta+\phi i)$ into its real and imaginary parts. **6**

(c) If $x+iy=\sin(u+iv)$ then prove that : **6**

(1) $\frac{x^2}{\cos h^2\upsilon}+\frac{y^2}{\sin h^2\upsilon}=1$

(2) $\frac{x^2}{\sin^2 u}+\frac{y^2}{\cos^2 u}=1$.

OR

3 (a) Prove that : $\log_e\{1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta\}=\log_e(2\cos\theta)-i\theta$. **6**

(b) Prove that : $\sin(\alpha+n\beta)-e^{i\alpha}\sin n\beta=e^{-in\beta}\sin\alpha$. **6**

(c) Separate $\tan^{-1}(x+iy)$ into its real and imaginary parts. **6**

4 (a) Define skew - symmetric and Hermitian matrices. Write their properties. **6**

(b) For any square matrix prove that : **6**

(1) $A + A^{\theta}$ is Hermitian

(2) $A - A^{\theta}$ is Skew - Hermitian.

(c) Prove that : **6**

Matrix A is Hermitian if and only if $A^{\theta} = A$.

OR

4 (a) When a matrix A is said to be 'row-equivalent' to some matrix B ? Prove that the following systems of equations are equivalent **6**

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+2z=3 \\ 3y-z=0 \\ x-2y=1 \end{aligned}\right\} \text{ and } \left\{\begin{aligned} x=3 \\ x-2y=1 \\ 3y+z=0 \end{aligned}\right.$$

(b) Express a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & -13 \end{bmatrix}$ into Row-Reduced Echelon form. **6**

(c) Find row-rank of a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 7 & 11 & 15 \end{bmatrix}$ by applying elementary row operations. **6**

5 (a) Find the inverse of a matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ by applying elementary row-operations. **6**

(b) Find the eigen values of a matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ and obtain the eigen vectors of A corresponding to the Largest eigen-value among them. **6**

(c) Define similar matrices. Prove that the eigen-values of two similar matrices are same. **6**

OR

5 (a) Prove that eigen-values of Hermitian matrix are real numbers. **6**

(b) Find the eigen-values of a matrix $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. **6**

Also justify Cayley-Mamilton theorem for A.

(c) Prove that the eigen-values of a skew-Hermitian matrix are either zero or imaginary. **6**

6 (a) If $\vec{r} = (1 - \cos t)\,\hat{i} + (t - \sin t)\,\hat{j}$ then find $\frac{d\vec{r}}{dt}$ and $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

(b) If $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a}$ and $\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{r} \times \vec{b}$ then show that

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{r} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

(c) Prove that $\vec{a}$ has constant magnitude iff $\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt = 0}$.

OR

6 (a) If $\vec{f} = x^2 y\,\hat{i} - 2xz\,\hat{j} + 2\,yz\,\hat{k}$ then find $Curl\ Curl\ \vec{f}$. **6**

(b) Prove that : $div\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \vec{v}\,.\,Curl\ \vec{U} - \vec{U}\,.\,Curl\ \vec{V}$. **6**

(c) State the condition for the vector to be Solenoidal. **6**

Prove that : $\vec{V} = (x+y)\,\hat{i} + (y-z)\,\hat{j} + (x-2\,z)\,\hat{k}$ is Solenoidal.